On se place dans l'espace euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormal. La distance entre deux points P, Q sera notée $|PQ|$, la longueur d'un vecteur v sera notée $|v|$.

On considère une sphère Σ de rayon 1 et de centre O. On se propose d'estimer le nombre maximum, soit $n(r)$, de sphères de rayon r tangentes extérieurement à Σ et mutuellement extérieures ou tangentes extérieurement.

On appellera ces sphères S_i et leurs centres A_i.

1) Montrer que $n(r)$ est une fonction décroissante de r.

2) Montrer que $n(r) \geq 2$ pour tout r.

3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{OA_j}, i \neq j$ ont pour cosinus au plus $1-2\left(\frac{r}{1+r}\right)^2$, en calculant $|A_iA_j|^2$ en fonction de ce cosinus.

4) Démontrer que si $r > 2\sqrt{3}+3$, alors n=2.

Pour cela, on pourra supposer que A_1, A_2, A_3 existent, évaluer $\left|\sum_{i=1}^{3}\overrightarrow{OA_i}\right|^2$ et dégager une contradiction.

5) Montrer que si $r \leq 2\sqrt{3}+3$, alors $n \geq 3$.

6) Démontrer que si $r > \sqrt{6}+2$, alors $n \leq 3$ par une méthode analogue à celle de la question **4)**.

7) Démontrer que si $r \leq \sqrt{6}+2$, alors $n \geq 4$.
On pourra utiliser les demi-droites d'origine O et dirigées par les vecteurs de coordonnées [1, 1, 1], [1, -1, -1], [-1, 1, -1] et [-1, -1, 1].

8) En utilisant les sommets, milieux de faces et milieux d'arêtes d'un cube, donner des minorants de $n(r)$ pour $r = \sqrt{2}+1, r = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ et $r = 1$.

On rappelle qu'une surface de révolution est obtenue par rotation autour de l'axe Ox d'une courbe définie par une fonction de classe C^1 à valeurs positives $y = f(x), a < x < b$ dans le plan xOy ; l'aire de cette surface est donnée par $2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$ (il n'est pas demandé de démontrer cette formule).

9) En appliquant ceci à la région de la sphère Σ formée des points d'abscisse $\geq s$, avec $-1 \leq s \leq 1$, montrer que cette région a pour surface $2\pi(1-s)$.

10) On considère la région Σ_i de Σ, intersection de Σ avec les demi-droites d'origine O et rencontrant la sphère S_i. Montrer que cette région a pour surface

$$2\pi\left(1-\frac{\sqrt{1+2r}}{1+r}\right).$$

11) Montrer que le nombre $n(r)$ est majoré par $\dfrac{2(1+r)\left(1+r+\sqrt{1+2r}\right)}{r^2}$.

12) Quel encadrement a-t-on pour $n(1)$?

Désormais r est supposé < 1. On pose $\beta = \arcsin\left(\dfrac{r}{1+r}\right)$. On choisit maintenant deux demi-plans P_1 et P_2 définis par $x > 0$, $y = x\tan\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$ et $x > 0$, $y = -x\tan\left(\dfrac{\pi}{m}\right)$ où m est entier ≥ 2 et $m\beta < \pi$.

13) On porte dans le demi-plan $x > 0, y = 0$ les points A_i, $0 \leq i \leq k$ de coordonnées $(1+r)\cos(2i\beta)$, 0, $(1+r)\sin(2i\beta)$.
Comment choisir k de façon que tous ces points soient à distance au moins r des demi-plans P_1 et P_2 ?

14) Montrer qu'on a alors $n(r) \geq m(2k+1)$.

15) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n(r) > Cr^{-2}$.